

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ВІДОКРЕМЛЕНИЙ ПІДРОЗДІЛ «СЛОВ'ЯНСЬКИЙ ТЕХНІКУМ
ЛУГАНСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО АГРАРНОГО УНІВЕРСИТЕТУ»

Філософія математики. Як із нічого складається все



Виконав: студент 2 курсу

Шаповалов Олександр Олександрович

Науковий керівник:

Києнко Ольга Анатоліївна

2018-2019 навч. рік

План

1. Вступ
2. Дайте мені точку опори
3. Дещо про точку...
4. Точка в математичній задачі
5. Точка і таємниці Всесвіту
6. Ще декілька цікавих моментів
7. Софізм про нескінченність точок
8. Висновки

Філософія математики
Як із нічого складається все

I. Вступ

Філософія – це не таємнича і далека від життя схема недосяжних для розуміння аргументів.

Філософія – це міркування людини про свої власні думки та поняття.

Філософія – це роздуми людини про себе та своє місце в навколишньому світі.

Філософія як наука займається теорією пізнання, напрацьовує системи пізнання та правила логіки для критичного аналізу. Філософи цікавляться поняттям про те, що істинно або що даремно, що правильно або що неправильно, а також судженням про цінності. Подібно тому, як лікарі дають нам поради щодо здоров'я, харчування, сну і т. д. , так і вчені-філософи дають нам рекомендації, які сприяють правильному мисленню та розумінню у всіх областях інтелектуальної діяльності. Ми самі виступаємо в ролі філософів-дилетантів кожного разу, коли розмірковуємо про наше життя та його зв'язок з оточуючим світом, коли задаємо питання. наприклад такі :

«Чи дійсно це так?»

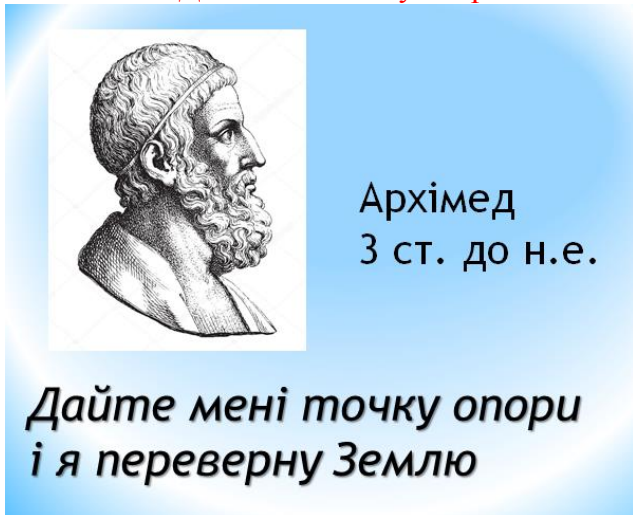
«Чи дійсно це існує?»

«Чому арифметика вірна?»

«Щастя існує в реальності чи є уявним?»

І т. п.

II. Дайте мені точку опори!



Спробуємо виступити в ролі філософів, вивчаючи математику.

Точка... Ви коли-небудь замислювались над тим, що таке точка? Чи дійсно існує точка?

Яку роль грає точка в математичній задачі?

Можна почути думку:

Точка – це крапочка; точка – це дірочка; точка вказує місце, не має розміру, не вимірюється; точка – це ніщо.

В підручнику геометрії читаємо:

«Точка – одне з основних, неозначуваних (початкових) понять геометрії.»

«Точка – найпростіша геометрична фігура.»

«Усі інші геометричні фігури складаються з точок.»

Отже, точка – це ніщо, але, все складається з точок!

Маємо парадокс:

Як із нічого складається все?

Спробуємо дослідити...

III. Дещо про точку...

Точка – найпростіша геометрична фігура, яка має певні властивості. Основні властивості точок розкриті в аксіомах геометрії, а саме в аксіомах належності, розміщення,

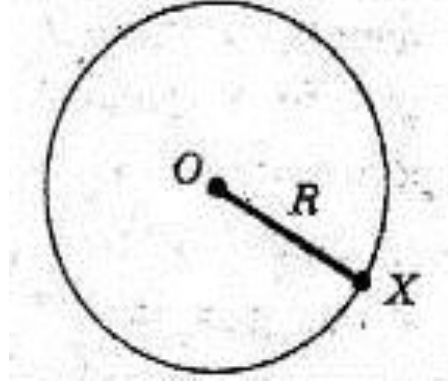
вимірювання, відкладання, паралельності та в аксіомах групи C, якими доповнено стереометрію.

Далі, не можна не торкнутись питання про ГМТ (геометричне місце точок).

Геометричним місцем точок, які мають певну властивість, називається така фігура, що складається з усіх точок площини, які мають цю властивість, і тільки з них.

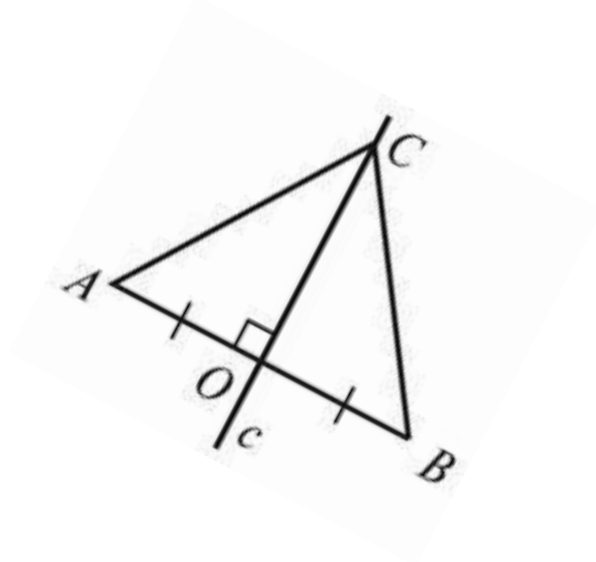
Згадаємо деякі ГМТ.

1) ГМТ, віддалених на відстані R від даної точки O .



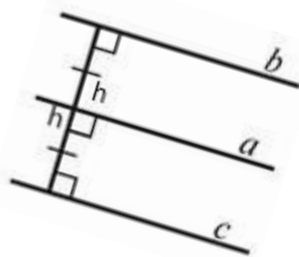
Коло з центром O і радіусом R .

2) ГМТ, рівновіддалених від двох заданих точок A і B .



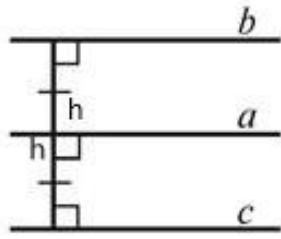
Серединний перпендикуляр до відрізка AB .

3) ГМТ, віддалених на відстань h від даної прямої a .



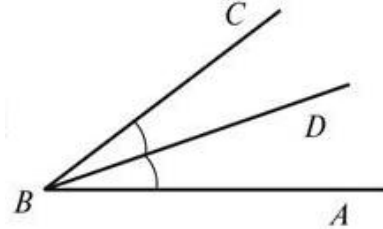
Дві прямі паралельні a і віддалені від неї на h .

4) ГМТ, рівновіддалених від двох паралельних прямих



Пряма, паралельна даним прямим та однаково віддалена від них.

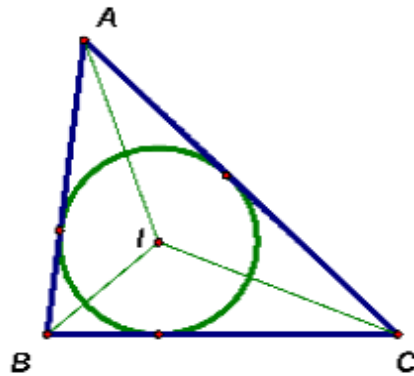
5) ГМТ, рівновіддалених від сторін кута.



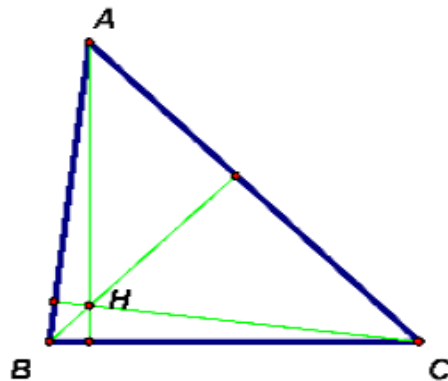
Бісектриса кута.

Далі, не можна не згадати про деякі **визначні точки трикутника**.

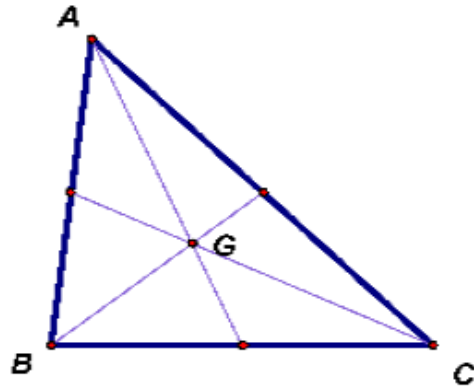
1) Інцентр трикутника – точка перетину бісектрис (центр вписаного кола) .



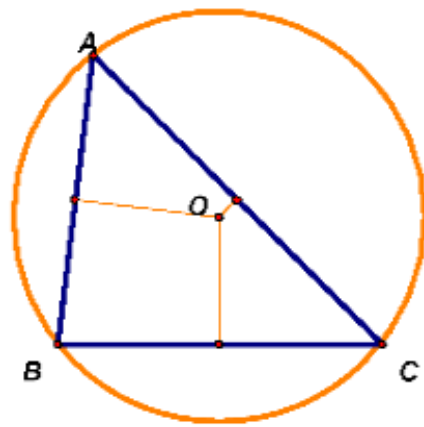
2) Ортоцентр – точка перетину висот або їх продовжень.



3) Центроїд (або центр мас) – точка перетину медіан.



4) Медіатрис – точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника (центр описаного кола) .



А хіба не чудовим є **координатний метод розв'язання задач?**



Рене Декарт
1596 - 1650 р.р.

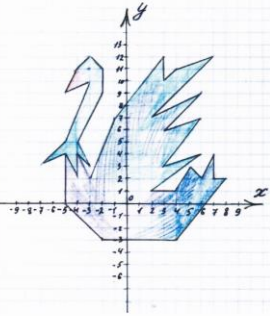
*Дайте мені матерію та рух
і я побудую Всесвіт*

Чи уявляємо ми точку в Декартовій системі координат?

Напевно, що так. Користуючись точками в координатній площині, можна створювати справжні картини.

Знайомтесь «Декартоманія» - новий жанр образотворчого мистецтва.

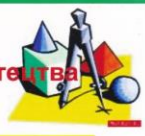
**Знайомтесь
“Декартомания” -
новий жанр образотворчого мистецтва**



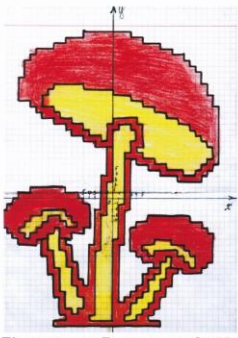
Код

(-5;0), (-5;4), (-2;-3), (4;-3),
(8;2), (7;4), (6;2), (5;3), (4;1),
(2;1), (6;4), (3;3), (6;7), (3;6),
(6;9), (2;7), (7;12), (4;11),
(3;10), (3;12), (-3;7), (-3;2),
(-4;4), (-4;2), (-4;4), (-3;3),
(-4;5), (-2;9), (-2;11), (-3;12),
(-5;9), (-3;11), (-5;5), (-7;3),
(-5;4), (-4;2), (-2;11)

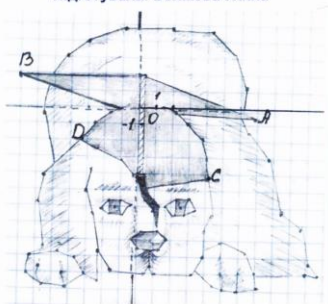
Підготувала: Курилович Олена



Розшифруй код



Підготувала: Бєлікова Уляна



Підготувала: Головченко Софія

IV. Точка в математичній задачі

Розглянемо кілька цікавих задач, в яких ключовим поняттям є точка.

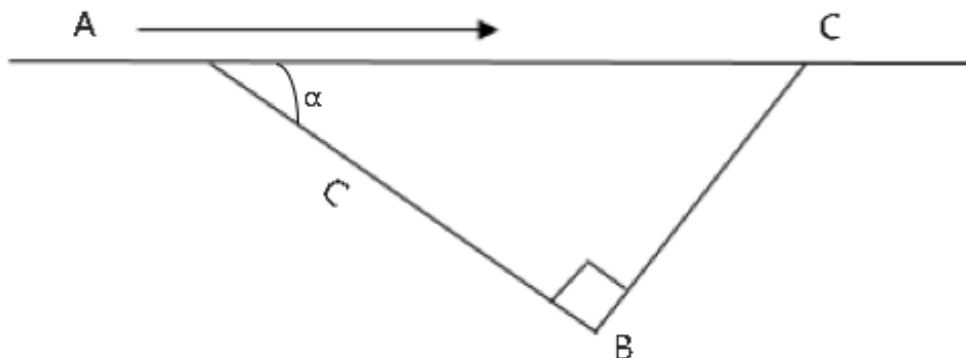
ЗАДАЧА №1

«Чоловік знаходячись в стороні від дороги, помітив автобус. В яку точку дороги йому необхідно йти, щоб встигнути на автобус, рухаючись з якомога меншою швидкістю?»

Розв'язання

При розв'язанні даної задачі скористаємося її геометричною інтерпретацією.

Пряма AC – дорога. Автобус знаходиться в точці A та рухається вправо.



Пішохід знаходиться в точці B і має направлятися в точку зустрічі – деяку точку C так, щоб відношення AC і BC було максимальним. Помітимо, що кут $\angle BAC = \alpha$ та довжина відрізка AB = C фіксовані. Отже, результат залежить лише від величини кута $\angle ABC$.

За теоремою синусів, можемо записати:

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

↓

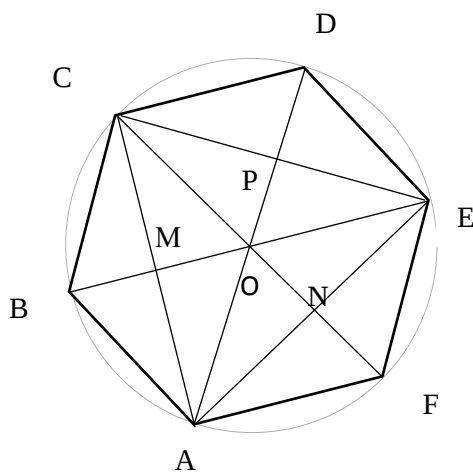
$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sin \angle ABC}{\sin \alpha}$$

Оскільки $0 \leq \sin \angle ABC \leq 1$, то відношення $\frac{\sin \angle ABC}{\sin \alpha}$, а отже, і відношення $\frac{AC}{BC}$, буде приймати максимальне значення, якщо $\sin \angle ABC = 1$, тобто, якщо $\angle ABC = 90^\circ$.

Іншими словами, треба рухатись під прямим кутом по відношенню до вихідного напрямку на автобус.

Відмітимо, що розв'язання існує лише для гострого кута між дорогою і напрямленням на автобус.

ЗАДАЧА №2



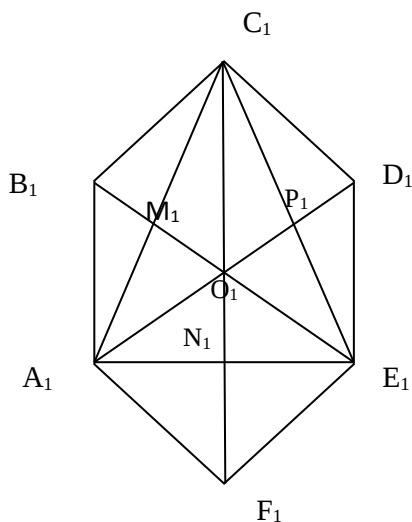
Відмітьте три довільні точки A_1 , C_1 , E_1 , які не лежать на одній прямій, вважаючи, що ці точки є паралельним зображеннями вершин A , C , E правильного шестикутника $ABCDEF$. Побудуйте проекції решти його вершин.

Розв'язання:

Властивості:

1. $\triangle ACE$ – правильний.
2. Точка O – точка перетину медіан (центроїд) трикутника ACE .
3. $OP=PD$; $ON=NF$; $OM=MB$ (за властивістю діагоналей ромба).

діагоналей ромба).



Побудова:

- 1) З'єднаємо точки A_1 , C_1 , E_1 .
 $\triangle A_1C_1E_1$ – зображення правильного трикутника;
- 2) Побудуємо медіани $\triangle A_1C_1E_1$;
- 3) O_1 – центроїд $\triangle A_1C_1E_1$;
- 4) На продовженні променя A_1P_1 відкладаємо відрізок P_1D_1 рівний P_1O_1 ;
- 5) На продовженні C_1N_1 – відрізок $N_1F_1 = O_1N_1$;
- 6) На продовженні E_1M_1 – відрізок $M_1B_1 = O_1M_1$;
- 7) З'єднавши відрізками точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 , E_1 , F_1 одержуємо

шестикутник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

Відповідь: Шестикутник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ шукане зображення.

ЗАДАЧА №3

Зобразити на малюнку множину точок $|y| = x^2 - 5x + 6$

Розв'язання:

$$|y| = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 - 5x + 6, y \geq 0 \\ -y = x^2 - 5x + 6, y < 0 \end{cases}$$

$$\text{або} \begin{cases} y = x^2 - 5x + 6, y \geq 0 \\ y = -x^2 + 5x - 6, y < 0 \end{cases}$$

1) Будуємо параболу $y = x^2 - 5x + 6, y \geq 0$

$$m = \frac{-b}{2a} = 2,5 \quad n = \frac{-D}{4a} = \frac{-(25-4 \cdot 6)}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad x_1 = 2; x_2 = 3.$$

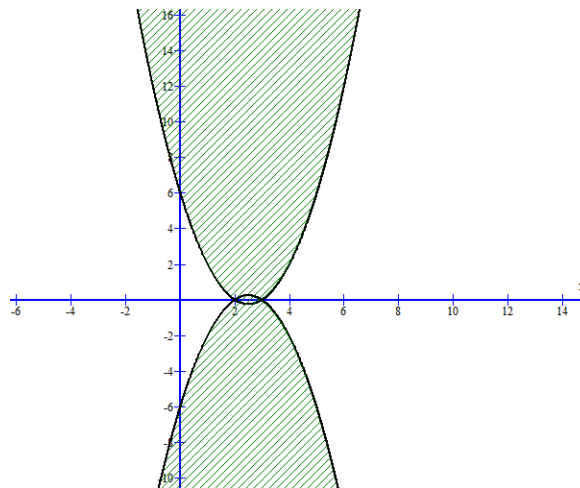
Виключаємо частину параболи, яка розміщена нижче осі абсцис.

2) Будуємо параболу $y = -x^2 + 5x - 6, y < 0$

$$m = \frac{-5}{2 \cdot (-1)} = 2,5 \quad n = \frac{-(25-4 \cdot (-1) \cdot (-6))}{2 \cdot (-1)} = \frac{1}{4}$$

$$x_1 = 2; x_2 = 3$$

Виключаємо частину параболи, яка розміщена не нижче осі абсцис.

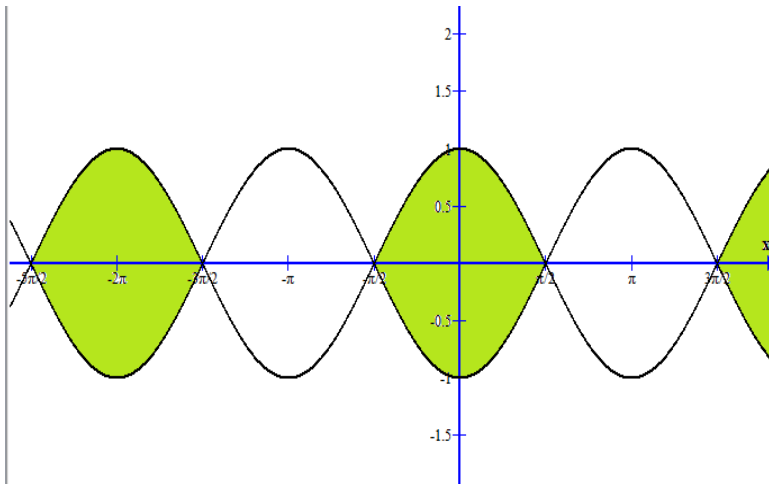


Відповідь: Шукана множина точок обмежує частину площини, що на малюнку виділена зеленим кольором.

ЗАДАЧА №4

Зобразити на малюнку множину точок $|y| = \cos x$

Розв'язання: $|y| = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x, & y \geq 0 \\ y = -\cos x, & y < 0 \end{cases}$



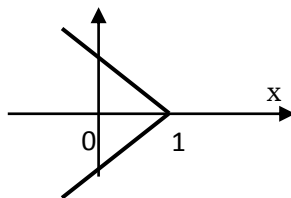
Відповідь: Шукана множина точок обмежує частину площини, що на малюнку виділена зеленим кольором.

ЗАДАЧА №5

Зобразити на малюнку множину точок $|x| + |y| \geq 1$

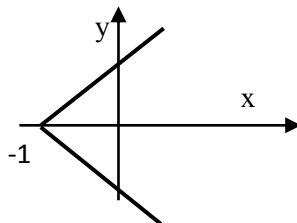
1) Якщо $x \geq 0$, то $x + |y| \geq 1$, $x \geq 1 - |y|$

Побудуємо графік функції $x = 1 - |y|$



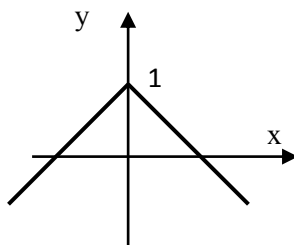
2) Якщо $x < 0$, то $-x + |y| \geq 1$, $-x \geq 1 - |y|$, $x \leq |y| - 1$.

Будуємо графік функції $x = |y| - 1$



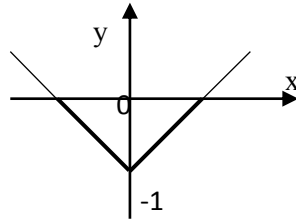
3) Якщо $y \geq 0$, то $|x| + y \geq 1$, $y \geq 1 - |x|$.

Будуємо графік функції $y = 1 - |x|$

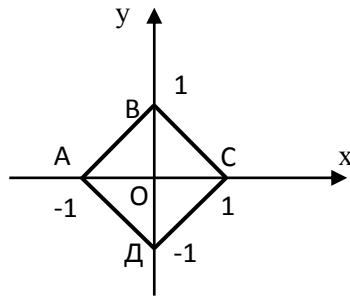


4) Якщо $y < 0$, то $|x| - y \geq 1$, $y \leq |x| - 1$.

Будуємо графік функції $y = |x| - 1$



5) Об'єднавши випадки 1-4, отримуємо шукану множину точок.



Відповідь: Шуканою множиною точок є всі точки площини XOY , виключаючи внутрішню область квадрата $ABCD$.

ЗАДАЧА №6

Зобразіть на координатній площині XOY множину точок, координати яких задовольняють нерівності

$$x^2 - 4y + y^2 \leq 0;$$

$$x^2 + y^2 \leq 4y; \quad y \geq 0, \text{ так як сума квадратів не може бути від'ємним числом.}$$

Виразимо x через y

$$x^2 \leq 4y - y^2$$

$$\sqrt{x^2} \leq \sqrt{4y - y^2}$$

$$|x| \leq \sqrt{4y - y^2}$$

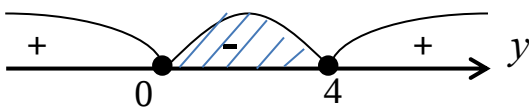
1. Знайдемо область допустимих значень y .

$$4y - y^2 \geq 0$$

$$-y(y-4) \geq 0$$

$$y(y-4) \leq 0$$

$$0 \leq y \leq 4$$



	0	$\pm\sqrt{3}$	± 2	$\pm\sqrt{3}$	0
y	0	1	2	3	4

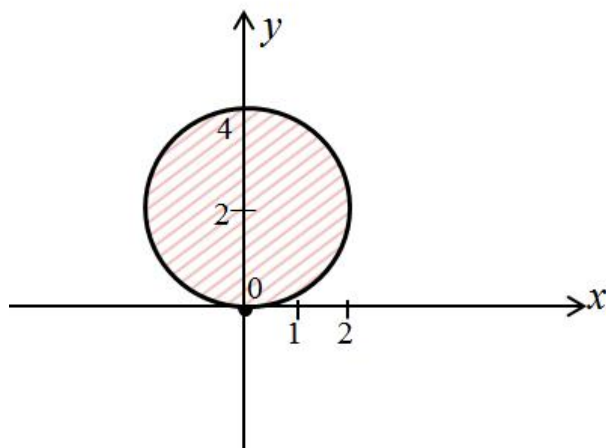


рис.2

Шуканою множиною точок є круг, зображений на малюнку 2.

Доведення:

$$|x| = \sqrt{4y - y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{4y - y^2}, & x \geq 0 \\ -x = \sqrt{4y - y^2}, & x < 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = \sqrt{4y - y^2}, & x \geq 0 \\ x = -\sqrt{4y - y^2}, & x < 0 \end{cases}$$

1. Розглянемо функцію $f_1(y) = \sqrt{4y - y^2}$ та побудуємо її графік

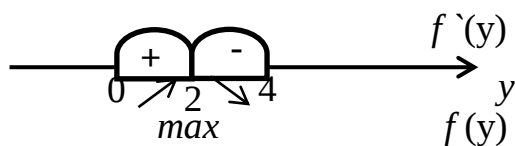
1) $D(f): [0; 4]$;

$$f'(y) = ((4y - y^2)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot (4y - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 - 2y) = \frac{4 - 2y}{2 \cdot \sqrt{4y - y^2}}$$

2) Критичні точки:

$$f'(y) = 0: 4 - 2y = 0;$$

$$-2y = -4; \underline{y = 2};$$



$$f_{\max} = f(2) = \sqrt{4 \cdot 2 - 2^2} = \sqrt{4} = 2;$$

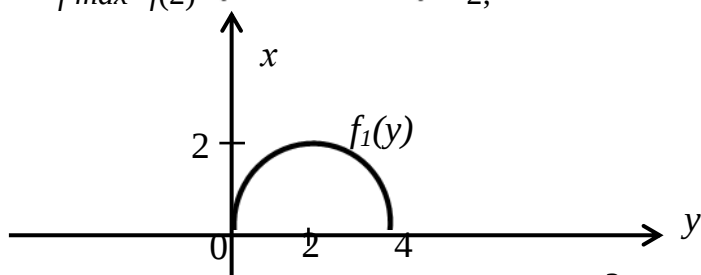


рис.3

2. Розглянемо функцію $f_2(y) = -\sqrt{4y - y^2}$.

Для побудови її графіка досить лінію, яка зображена на рис.3 симетрично відобразити відносно осі Oy .

Об'єднуючи результати Рис.3 та Рис.4 отримаємо відповідь, яка зображена на рис.2

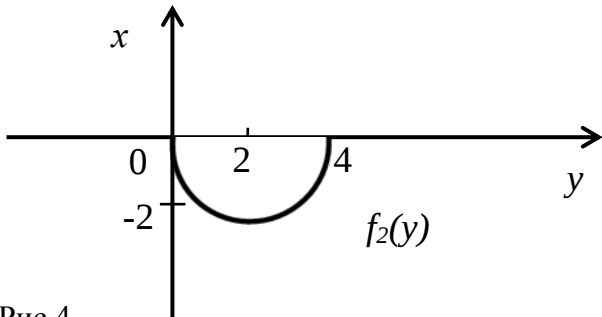
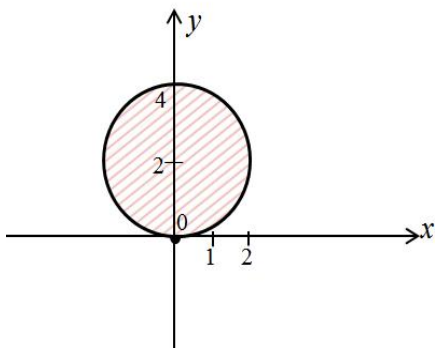


Рис.4



Другий спосіб розв'язання

$$x^2 - 4y + y^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + (y^2 - 4y + 4) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 \leq 2^2$$

Відповідь: круг на мал. №2

V. Точка і таємниці Всесвіту.



Геометрично точку можна порівняти з чорною дірою у космосі.

Чорні діри – найнезвичайніші об'єкти у Всесвіті. Побачити чорні діри не можна, але про них можна судити, використовуючи супутні ефекти. Сингулярність

Сингулярністю називається об'єкт з практично нульовим об'ємом та дуже великою масою. Наприклад, за теорією відносності Ейнштейна кожна планета повільно стискається. Подолавши визначену відмітку (для Землі 1 см), вона стискається (сплющується) за долю секунди до сингулярності, яка являється практично точкою, в якій зосереджена маса всієї планети.

Також, є припущення, що сингулярність – це центр чорної діри. Якщо уявити, що точка має масу і вона матеріальна, то маса будь-якого тіла прямує до нескінченності.

VI. Ще декілька цікавих моментів.

1) Чому не можна ділити на нуль?

Припустимо, що ділити на нуль можна. Нехай $\frac{1}{0}=x$.

Розглянемо пари взаємнообернених чисел

2 і $\frac{1}{2}$; 3 і $\frac{1}{3}$; 4 і $\frac{1}{4}$...

100 і $\frac{1}{100}$... 1000 і $\frac{1}{1000}$... і т. д.

Чим більше число, тим ближче до нуля знаходиться обернене до нього число та навпаки.



Якщо взяти найпершу точку 0 (нуль менше будь-якого додатного числа), то обернене йому число буде більшим будь-якого додатного числа. Але не існує найбільшого додатного числа, оскільки ряд чисел є нескінченним.

Висновок. Припущення не вірне. Отже, на нуль ділити неможна.

VII. Софізм про нескінченність точок.

Якщо точка не має ніяких матеріально вимірюваних величин, то у відрізок АВ можна заключити нескінченність точок. Чи може таке бути? Адже відрізок вимірювана величина, а нескінченність ні.



Відповідь: відрізок – це частина прямої, яка обмежена двома точками. Неможна обмежити нескінченність точок точками, тому точки всередині відрізка неможна відокремлювати від інших точок, а всього їх і так нескінченність.

VIII. Висновки

Чи змогли ми відповісти на запитання, «що таке точка?» та «Як із нічого складається все?». Думаю, що ні. Але, як кажуть «Далі буде».

У містичних уявленнях точка – центр і джерело життя, символ первинної творчої енергії, яку інколи уявляють настільки сконцентрованою, що відобразити її може лише дещо нематеріальне, наприклад, отвір. Древній символізм точки як гранично стиснутої енергії широко поширений у містичній літературі, надто близький до сучасних фізичних і астрономічних теорій про походження Всесвіту.

Використана література

1. Буряк Д.В., Плотнікова Л.І., Порпуліт О.М., Буряк Н.В. Математика. Готуємося до контрольної роботи. Навч. посібник, 2-е вид. – Одеса: Астропринт, 2017.
2. Дудник Н. Організація пізнавальної діяльності учнів / Н. Дудник // Завуч. - 2005. - Жовт.(№30). - С.4-6.
3. Забєлишинська М.Я., Захарійченко Ю.О., Карпик В.В. та ін. Математика. Комплексне видання. 13-те вид. – К: Літера ЛТД, 2018.
4. Кошелєв О. Л. Навчання студентів процедурам і операціям творчої пізнавальної діяльності : автореф. дис. ... канд. пед. наук : спец. 13.00.01 «Теорія та історія педагогіки» / О. Л. Кошелєв - Луганськ, 1995. - 20 с.
5. Паркер С., Харріс Н. Дитяча енциклопедія. Таємниці Всесвіту. – Харків: Книжковий клуб, 2008.
6. Роджерс Е. Фізика для допитливих. Т.1. Матерія. Рух. Сила. – М: Світ, 1971.
7. Сучасні шкільні технології.//Бібліотека "Шкільного світу". Завуч. Бібліотека. Ч. 1 / упоряд. І. Рожнятовська, В. Зоц. - 2005. - 112 с.
8. Сиротинко Г. О. Сучасний урок: інтерактивні технології навчання. - Харків: Вид. група «Основа», 2003. Бібліотека журналу «Управління школою»; Вип. 3.-32 с.
9. Осинська, В. Н. Формування розумової культури учнів у процесі навчання математики / В. М. Осинська. - Київ: Радянська школа, 1989. - 192 с.
10. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвиваючого навчання математики / З. І. Слєпкань. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. - 240 с.
11. Титаренко О. М., Семенець В. В., Кармазин В. В. Збірник тренувальних задач з математики: Навчальний посібник. - Харків : Рубікон, - 2002. - 224 с.